Προσδιορισμός παραμέτρου σε όρια:

(δίχως τις έννοιες της συνέχειας ή της παραγώγου)

Στις περιπτώσεις όπου το όριο είναι πραγματικός αριθμός, αν η αντικατάσταση του x με το x_0 μηδενίζει τον παρονομαστή, τότε θα πρέπει να μηδενίζει και τον αριθμητή.

Η μεθοδολογία, λοιπόν, αντιμετώπισης αυτών τον ασκήσεις είναι ανάλογη με τη μεθοδολογία που θα ακολουθούσαμε αν είχαμε απροσδιοριστία. Παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή προσπαθώντας να εμφανίσουμε κοινό παράγοντα τον $x-x_0$ και να τον απλοποιήσουμε.

Ασκήσεις:

1) Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3+\alpha x^2-9x-9\alpha}{x^2-2x-3} = 12$

Σκέψη: παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής μηδενίζεται για x=3. Ξεκινάμε την προσπάθεια να εμφανίσουμε κοινό παράγοντα σε αριθμητή και παρονομαστή τον x-3. Στον παρονομαστή παραγοντοποιούμε το τριώνυμο ενώ στον αριθμητή παραγοντοποιούμε κατά ζεύγη:

Είναι: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3+\alpha x^2-9x-9\alpha}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2(x+\alpha)-9(x+\alpha)}{(x+1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+\alpha)(x^2-9)}{(x+1)(x-3)} =$

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+\alpha)\cancel{(x-3)}(x+3)}{(x+1)\cancel{(x-3)}} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+\alpha)(x+3)}{x+1} = \dfrac{6(3+\alpha)}{4} = 12 \Leftrightarrow$

$3+\alpha = \dfrac{{}^{2}\cancel{12}\cdot 4}{\cancel{6}_{1}} \Leftrightarrow 3+\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 5$

2) Να βρεθεί η τιμή του $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+\alpha x-\alpha-1}{\sqrt{10-x^2}-3}=6$

Είναι: $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+\alpha x-\alpha-1}{\sqrt{10-x^2}-3} = \lim_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2+\alpha x-\alpha-1\right)\left(\sqrt{10-x^2}+3\right)}{\left(\sqrt{10-x^2}-3\right)\left(\sqrt{10-x^2}+3\right)} =$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left[(x-1)(x+1)+\alpha(x-1)\right]\left(\sqrt{10-x^2}+3\right)}{\sqrt{10-x^2}^{\,2}-3^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+\alpha)\left(\sqrt{10-x^2}+3\right)}{10-x^2-9} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+\alpha)\left(\sqrt{10-x^2}+3\right)}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{-\cancel{(1-x)}(x+1+\alpha)\left(\sqrt{10-x^2}+3\right)}{\cancel{(1-x)}(1+x)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-(x+1+\alpha)\left(\sqrt{10-x^2}+3\right)}{1+x} = \frac{-(2+\alpha)6}{2} = 6 \Leftrightarrow 2+\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha=-4$$

Επιπλέον ασκήσεις:

3) Να βρεθεί η τιμή του $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+(\alpha-2)x-2\alpha}{x^2-4}=2$

4) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x^2-\alpha x+3\alpha-9}{x^2-3x}$.

(i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

(ii) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$: $\lim_{x\to 3} f(x) = \dfrac{2}{3}$.

(iii) Για α=4 να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}$ και $\lim_{x\to 0}\left[\left(\sqrt{x+4}-2\right)f(x)\right]$